

30T MATH

2020

**MATHEMATICS**

Full Marks : 100

---

Pass Marks : 30

Time : Three hours

*The figures in the margin indicate full marks for the questions.*

Q. No. 1 (a-j) carries 1 mark each	$1 \times 10 = 10$
Q. Nos. 2 -13 carry 4 marks each	$4 \times 12 = 48$
Q. Nos. 14-20 carry 6 marks each	$6 \times 7 = 42$
	<hr/>
	Total = 100

Contd.

1. Answer the following questions :

1×10=10

তলৰ প্রশ্নবোৰৰ উত্তৰ লিখা :

- (a) Determine the relation  $R$  on the set of whole numbers  $\leq 10$  defined by

$$R = \{ (x, y) \mid 2x + 3y = 12 \}.$$

10 তকৈ সৰু বা সমান পূৰ্ণসংখ্যাৰ সংহতিত  $R$  সম্বন্ধটো এনেধৰণে সংজ্ঞাবদ্ধ  $R = \{ (x, y) \mid 2x + 3y = 12 \}$ । সম্বন্ধটো নিৰ্ণয় কৰা।

- (b) Write the principal value of

$$\cos^{-1} \left[ \cos \left( \frac{-16\pi}{15} \right) \right].$$

$$x = \frac{12 - 3x}{2}$$

$\cos^{-1} \left[ \cos \left( \frac{-16\pi}{15} \right) \right]$  ৰ মুখ্য মান লিখা।

$$\left( \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \right)$$

$$[0, \pi]$$

- (c) Let  $A = [a_{ij}]$  is a square matrix of order 2 where  $a_{ij} = i^2 - j^2$ .

Then  $A$  is

(i) Skew-symmetric matrix

(ii) Symmetric matrix

(iii) Diagonal matrix

(iv) None of these.

ধৰা হ'ল  $A = [a_{ij}]$  এটা 2 ক্ৰমৰ বৰ্গ মৌলকক্ষ য'ত  $a_{ij} = i^2 - j^2$ । তেন্তে  $A$  এটা

(i) বিষম-সমমিত মৌলকক্ষ

(ii) সমমিত মৌলকক্ষ

(iii) বিকৰ্ণ মৌলকক্ষ

(iv) এটাও নহয়।

$$\sqrt{x^2+a^2} \cdot dx = \frac{x}{a} \sqrt{x^2+a^2} + \sin^{-1} \frac{x}{a}$$

(d) Find the derivative of  $x^3$  with respect to  $x^2$ . 1

$x^2$  সাপেক্ষে  $x^3$  ৰ অৱকলজ উলিওৱা।

(e) Find the equation of the tangent to the curve  $y = f(x)$  at  $(x_0, y_0)$ , if  $\frac{dy}{dx}$  does not exist at this point. 1

যদি  $y = f(x)$  বক্ৰৰ  $(x_0, y_0)$  বিন্দুত  $\frac{dy}{dx}$  স্থিত নহয়, তেন্তে বক্ৰডালৰ এই বিন্দুত টনা স্পৰ্শকৰ সমীকৰণ লিখা।

(f) If  $\sec^{-1} x = \operatorname{cosec}^{-1} y$  ( $|x| \geq 1, |y| \geq 1$ ), then find the value of, 1

$$\cos^{-1} \left( \frac{1}{x} \right) + \cos^{-1} \left( \frac{1}{y} \right).$$

যদি  $\sec^{-1} x = \operatorname{cosec}^{-1} y$  ( $|x| \geq 1, |y| \geq 1$ ),  
তেন্তে  $\cos^{-1} \left( \frac{1}{x} \right) + \cos^{-1} \left( \frac{1}{y} \right)$  ৰ মান উলিওৱা।

(g) Write the direction cosines of the vector  $\hat{j}$ . 1

$\hat{j}$  ভেক্টৰৰ দিশাংকবোৰ লিখা।

(h) Write the order of the differential equation representing the family of curves given by

$$y = a \sin(x + b), \text{ where } a \text{ and } b \text{ are arbitrary constants. } 1$$

$y = a \sin(x + b)$  য'ত  $a$  আৰু  $b$  যাদৃচ্ছিক ধ্ৰনক, সমীকৰণটোৱে বুজোৱা অৱকল সমীকৰণটোৰ ক্ৰম লিখা।

- (i) The projections of a line on the axes are 3, 4 and  $2\sqrt{6}$ . Find the length of the line. 1

এডাল বেখাৰ অক্ষকেইডালত প্ৰক্ষেপ হ'ল 3, 4 আৰু  $2\sqrt{6}$ । বেখাডালৰ দৈৰ্ঘ্য নিৰ্ণয় কৰা।

- (j) If  $x = \phi(t)$ , then find  $\int f(x) dx$ . 1

$x = \phi(t)$  হ'লে  $\int f(x) dx$  নিৰ্ণয় কৰা।

2. A relation  $R$  in the set  $A = \{x \in \mathbb{Z} : 0 \leq x \leq 12\}$  is given by  $R = \{(a, b) : |a - b| \text{ is a multiple of } 4\}$ . Prove that  $R$  is an equivalence relation. Find the set of all elements related to 1. 4

দেখুওৱা যে  $A = \{x \in \mathbb{Z} : 0 \leq x \leq 12\}$  সংহতিত সংজ্ঞাবদ্ধ সম্বন্ধ

$R = \{(a, b) : |a - b| \text{ 4 অৰ এটা গুণিতক}\}$  সমতুল্য সম্বন্ধ। 1ৰ লগত যুক্ত মৌলবোৰৰ সংহতি উলিওৱা।

OR / অথবা

Let  $f : \mathbb{R} - \{3\} \rightarrow \mathbb{R} - \{1\}$  is defined by  $f(x) = \frac{x-2}{x-3}$ . Show that  $f$  is a bijective function. 2+2=4

ধৰা হ'ল  $f : \mathbb{R} - \{3\} \rightarrow \mathbb{R} - \{1\}$ , য'ত  $f(x) = \frac{x-2}{x-3}$  ৰে সংজ্ঞাবদ্ধ। দেখুওৱা যে  $f$  এটা একৈকী আচ্ছাদক ফলন।

3. Solve :  
সমাধান করা :

$$\sin^{-1}(1-x) - 2\sin^{-1}x = \frac{\pi}{2}$$

OR/অথবা

If  $\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$  and  $\beta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ , where  $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$ ; then find the value of  $\alpha - \beta$ .

4

যদি  $\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$  আৰু  $\beta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ , য'ত  $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$ ; তেন্তে  $\alpha - \beta$  ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

4. Show that  
দেখুওৱা যে

$$\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ca & cb & c^2+1 \end{vmatrix} = 1+a^2+b^2+c^2$$

OR/অথবা

যদি  $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$  and (আৰু)  $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ , then

examine whether the matrix  $A^2 - 2B$  is singular.

4

তেন্তে  $A^2 - 2B$  মৌলকক্ষটো অপ্ৰতিম হ'বানে পৰীক্ষা কৰা।

5. Find all points of discontinuity of  $f$ , where

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{if } x \neq 0 \\ 0, & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

$$\int \sqrt{x^2 + 1} \cdot dx$$

4

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{যদি } x \neq 0 \\ 0, & \text{যদি } x = 0 \end{cases}$$

অৰ দ্বাৰা সংজ্ঞাবদ্ধ ফলনটোৰ বিচ্ছিন্নতাৰ বিন্দুসমূহ উলিওৱা।

6. Find  $\frac{dy}{dx}$ , if

2+2=4

$\frac{dy}{dx}$  উলিওৱা, যদি

(a)  $y^x = x^y$

(b)  $\cos y = x \cos (a + y)$ .

7. Evaluate :

মান নিৰ্ণয় কৰা :

(a)  $\int \sqrt{x^2 + 2x + 5} dx$

$$\frac{(x+1+2)(x+1-2)}{(x+1)(x+1)}$$

$$\begin{aligned} & x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 - 1 \\ & (x+1)^2 - 4 \\ & \Rightarrow (x+1)^2 - 2^2 \end{aligned}$$

4

OR/অথবা

(b)  $\int \frac{6x+7}{\sqrt{(x-5)(x-4)}} dx$

$t = 1 + \cos x$   
 $\frac{dt}{dx} = -\sin x$   
 $\Rightarrow dx = \frac{-dt}{\sin x}$   
 $\frac{1}{t} \cdot \sin x$  4

8. Evaluate :

মান নির্ণয় করা :

(a)  $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x - \cos x}{1 + \sin x \cos x} dx$

$\frac{1}{1 + \cos x} \cdot \log |t|$  4

OR/অথবা

(b)  $\int_0^{\pi} \log(1 + \cos x) dx$

$t = (1 + \cos x)$   
 $\Rightarrow$  4

9. If  $x = a(\theta + \sin \theta)$  and  $y = a(1 - \cos \theta)$ , find  $\frac{d^2y}{dx^2}$  at  $\theta = 0$ . 4

যদি  $x = a(\theta + \sin \theta)$  আৰু  $y = a(1 - \cos \theta)$ ,

তেতিয়া  $\theta = 0$  ত  $\frac{d^2y}{dx^2}$  ৰ মান নির্ণয় কৰা।

OR / অথবা

State Rolle's theorem and give geometrical interpretation of the theorem. 2+2=4

ব'লৰ উপপাদ্যৰ সংজ্ঞা লিখা আৰু ইয়াৰ জ্যামিতিক ব্যাখ্যা দৰ্শোৱা।

10. Solve the differential equation :

অৱকল সমীকৰণটোৰ সমাধান উলিওৱা :

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} + \operatorname{cosec}\left(\frac{y}{x}\right) = 0;$$

4

$y = 0$  when (যেতিয়া)  $x = 1$ .

OR / অথবা

$$(1-x^2)\frac{dy}{dx} + 2xy = x\sqrt{1-x^2}.$$

4

11. If  $f(x) = x^3 - 6x^2 - 36x + 7$ , find the interval for which  $f(x)$  is (6.2)

(i) strictly increasing

(ii) strictly decreasing.

30T MATH

Handwritten notes and calculations:

$3(7+2)(7-6)$   
 $\rightarrow 3 \times 1 = 3$   
 $18$

$3(1+2)(1-6)$   
 $\rightarrow 3 \times 3 \times (-5) = -45$   
 $\rightarrow -45$

$3(-1+2)(-1-6)$   
 $\rightarrow 3 \times 1 \times -7 = -21$   
 $\rightarrow -21$

$2+2=4$   
 $2x-6x+2x-4$   
 $\rightarrow 2(x-6)+2(x-2)$



$f(x) = x^3 - 6x^2 - 36x + 7$  ৰ দ্বাৰা নিৰ্দিষ্ট ফলনটো কোন অন্তৰালত

(i) সতত বৰ্দ্ধমান

(ii) সতত হ্রাসমান

উলিওৱা।

$$\begin{array}{r} 24 \\ 24 \\ \hline 486 \\ 576 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ 24 \\ \hline 486 \\ 576 \end{array}$$

OR/ অথবা

Find the area of the largest rectangle that can be formed having a perimeter of 40 meters. 4

এটা আয়তক্ষেত্ৰৰ পৰিসীমা 40 মিটাৰ। আয়তক্ষেত্ৰটোৰ কালি উলিওৱা যেতিয়া ই গৰিষ্ঠ।

12. Find a unit vector perpendicular to each of the vectors  $\vec{a} + \vec{b}$  and  $\vec{a} - \vec{b}$ , where  $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$  and  $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$ . 4

$\vec{a} + \vec{b}$  আৰু  $\vec{a} - \vec{b}$  ভেক্টৰৰ লম্ব হোৱাকৈ এটা একক ভেক্টৰ নিৰ্ণয় কৰা য'ত  $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$  আৰু  $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$ .

OR/ অথবা

Let  $\vec{a} = \vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$ ,  $\vec{b} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 7\vec{k}$  and  $\vec{c} = 2\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$ . Find a vector  $\vec{d}$  which is perpendicular to both  $\vec{a}$  and  $\vec{b}$  and  $\vec{c} \cdot \vec{d} = 15$ . 4

ধৰা হ'ল  $\vec{a} = \vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$ ,  $\vec{b} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 7\vec{k}$  আৰু  $\vec{c} = 2\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$ . এটা ভেক্টৰ  $\vec{d}$  নিৰ্ণয় কৰা য'ত  $\vec{d}$ ;  $\vec{a}$  আৰু  $\vec{b}$  ৰ ওপৰত লম্ব আৰু  $\vec{c} \cdot \vec{d} = 15$ .

13. Bag A contains 6 red and 4 white balls; bag B contains 4 red and 6 white balls and bag C contains 5 red and 5 white balls respectively. A bag is selected at random and a ball is drawn from the selected bag. If the ball is found to be red, find the probability that the ball is drawn from bag A. 4

যথাক্রমে মোনা A ত 6 টা বগা আৰু 4 টা বগা বল, মোনা B ত 4 টা বগা আৰু 6 টা বগা আৰু মোনা C ত 5 টা বগা আৰু 5 টা বগা বল আছে। যাদৃচ্ছিকভাৱে এখন মোনাৰ পৰা এটা বল লোৱা হ'ল। যদি বলটো বগা হয়, বলটো মোনা A ৰ পৰা লোৱাৰ সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয় কৰা।

OR/ অথবা

A fair coin is tossed 10 times. Find the probability of getting exactly five heads. 4

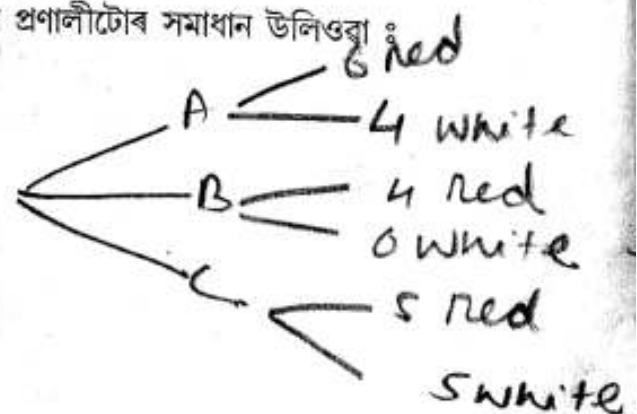
এটা নিখুঁত মুদ্ৰা 10 বাৰ টছ কৰা হ'ল। ঠিক পাঁচটা মুণ্ডপ্ৰাপ্ত হোৱাৰ সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয় কৰা।

14. Using matrix method solve the following system of linear equations : 6

$$\begin{array}{r} 3 \times 15/15 \\ 5 \times 5/5 \\ \hline 15/15 \\ 25/25 \\ \hline 40/40 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (A+3) \\ \div 4 \\ 4 \quad -5 \end{array} \quad \begin{array}{l} x-y+z=4 \\ 2x+y-3z=0 \\ x+y+z=2 \end{array}$$

মৌলিকতৰ পদ্ধতিৰে তলৰ বৈখিক সমীকৰণ প্ৰণালীটোৰ সমাধান উলিওৱা :



OR / অথবা

Using elementary transformation find the inverse of the following matrix : 6

মৌলিক প্রক্রিয়া প্রয়োগ কৰি তলৰ মৌলকক্ষটোৰ প্ৰতিলোম মৌলকক্ষ উলিওৱা :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & -5 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Handwritten notes for matrix inversion:  
 $\frac{1}{2} \times \frac{2}{2} = 1$   
 $\frac{1}{-3} \times \frac{-3}{-3} = 1$   
 $\frac{1}{2} \times \frac{2}{2} = 1$

15. Prove that the curves  $x = y^2$  and  $xy = k$  cut at right angles if  $8k^2 = 1$ . 6

প্ৰমাণ কৰা যে  $x = y^2$  আৰু  $xy = k$  বক্ৰই লম্বভাৱে কটাকটি কৰে যদি  $8k^2 = 1$ .

Handwritten solution for Q15:  
 $x = y^2$   
 $\Rightarrow 1 = 2y \cdot \frac{dy}{dx}$   
 $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}$   
 $2y = k$   
 $\Rightarrow 2 \cdot \frac{dy}{dx} + y = 0$   
 $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{2}$   
 OR/ অথবা

Handwritten note:  
 $m_1 m_2 = -1$

Find the absolute maximum and absolute minimum values of the function  $f$  given by  $f(x) = \cos^2 x + \sin x$ ,  $x \in [0, \pi]$ . 6

Handwritten solution for Q16:  
 $f(x) = \cos^2 x + \sin x$ ,  $x \in [0, \pi]$  ব দ্বাৰা নিৰ্দিষ্ট  $f$  ফলনটোৰ পৰম গৰিষ্ঠ আৰু  
 পৰম লঘিষ্ঠ মান উলিওৱা।  
 $\frac{1}{2} \times \frac{2}{2} = 1$   
 $2x = 1$

16. Find the area of the region enclosed by the parabola  $x^2 = y$ , the line  $y = x + 2$  and the  $x$ -axis. 6

$x^2 = y$  অধিবৃত্ত,  $y = x + 2$  ৰেখা আৰু  $x$ -অক্ষই আগুৰা ক্ষেত্ৰৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা।

OR / অথবা

Using integration find the area of the region bounded by the triangle whose vertices are  $(1, 0)$ ,  $(2, 2)$  and  $(3, 1)$ . 6

অনুকলন ব্যৱহাৰ কৰি  $(1, 0)$ ,  $(2, 2)$  আৰু  $(3, 1)$  শীৰ্ষবিন্দু বিশিষ্ট ত্ৰিভুজটোৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা।

17. Find the vector equation of the line passing through the point  $(1, 2, 1)$  and perpendicular to the plane  $\vec{r} \cdot (2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) = 10$ . 6

$(1, 2, 1)$  বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা আৰু  $\vec{r} \cdot (2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) = 10$  সমতলখনৰ লম্ব হোৱা ৰেখাডালৰ ভেক্টৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

ক্ৰ. নং = ১১

OR / অথবা

Find the vector equation of the plane passing through the intersection of the planes  $\vec{r} \cdot (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) = 6$  and  $\vec{r} \cdot (2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}) = -5$  and the point  $(1, 1, 1)$ . 6

$\vec{r} \cdot (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) = 6$  আৰু  $\vec{r} \cdot (2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}) = -5$  সমতলদুখনে কটাকটি কৰা ৰেখাৰ আৰু  $(1, 1, 1)$  বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা সমতলখনৰ ভেক্টৰ সমীকৰণ উলিওৱা।

18. The two adjacent sides of a parallelogram are  $(2\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k})$  and  $(\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k})$ . Find the unit vector parallel to its diagonal. Also find the area of the parallelogram. 6

এটা সামান্তৰিকৰ দুটা সম্বন্ধিত বাহু হ'ল  $(2\hat{i} - 4\hat{j} + 5\hat{k})$  আৰু  $(\hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k})$ । ইয়াৰ কৰ্ণৰ সমান্তৰাল একক ভেক্টৰ উলিওৱা। সামান্তৰিকটোৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা।

OR / অথবা

For any two vectors  $\vec{a}$  and  $\vec{b}$ , prove that

6

$$|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|.$$

যিকোনো দুটা ভেক্টৰ  $\vec{a}$  আৰু  $\vec{b}$  ৰ বাবে প্ৰমাণ কৰা যে

$$|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|.$$

19. Solve graphically the following linear programming problem :

লৈখিক নিয়মেৰে তলৰ বৈখিক প্ৰোগ্ৰামিং সমস্যাটোৰ সমাধান উলিওৱা :

Maximize or Minimize

$$Z = x + 2y$$

subject to constraints

$$x + 2y \geq 100$$

$$2x - y \leq 0$$

$$2x + y \leq 200$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

$Z = x + 2y$  ৰ সৰ্বোচ্চ আৰু সৰ্বনিম্ন মান উলিওৱা য'ত

$$x + 2y \geq 100$$

$$2x - y \leq 0$$

$$2x + y \leq 200$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

$$x + 2y + 4x - 2y = 100$$

$$\Rightarrow 5x = 100$$

$$\Rightarrow x = 20$$

$$2x - y = 0$$

$$\Rightarrow 2(20) - y = 0$$

$$\Rightarrow 40 - y = 0$$

$$\Rightarrow y = 40$$

$$(20, 40)$$

$$x + 2y = 100$$

$$(0, 50), (100, 0)$$

OR / অথবা

Maximize

$$Z = 1000x + 600y$$

subject to constraints

$$x + y \leq 200$$

$$x \geq 20$$

$$y \geq 4x$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

6

$Z = 1000x + 600y$  ৰ সৰ্বোচ্চ মান উলিওৱা য'ত

$$x + y \leq 200$$

$$x \geq 20$$

$$y \geq 4x$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

20. Two numbers are selected at random (without replacement) from the first six positive integers. Let  $X$  denotes the larger of the two numbers. Find mean of  $X$ .

6

প্রথম ছয়টা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যাৰ পৰা পুনৰস্থাপন নকৰাকৈ যাদৃচ্ছিকভাৱে দুটা সংখ্যা বাছনি কৰা হ'ল।  $X$  য়ে প্ৰাপ্ত সংখ্যা দুটাৰ ভিতৰত ডাঙৰটোক সূচালে  $X$  ৰ মাধ্য নিৰ্ণয় কৰা।

**OR / অথবা**

How many times a fair coin must be tossed so that the probability of having at least one head is more than 90%? 6

এটা নিখুঁত মুদ্রা কিমান বার টছ কৰিব লাগিব যাতে কমেও এবাৰ মুণ্ড পোৱাৰ সম্ভাৱিতা 90% তকৈ বেছি হয়?

— x —