2016

MATHEMATICS

Full Marks : 100

Pass Marks : 30

Time : Three hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions.

1. Answer the following questions : 1×10=10

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়াঁ :

(a) Let $A = \{1, 2, 3\}$. For $x, y \in A$, let xRy if and only if $x > y$. Write down R as a subset of $A \times A$.

ধৰাঁ $A = \{1, 2, 3\}$ । $x, y \in A$ ৰ বাবে, ধৰাঁ xRy যদি আৰু যদিহে $x > y$ । R সংহতিটো $A \times A$ ৰ উপসংহতি হিচাপে লিখাঁ।

(b) What is the domain of the function $f(x) = \frac{1}{x-2}$?

$f(x) = \frac{1}{x-2}$ ফলনৰ আদিক্ষেত্ৰ কি ?

(c) If $\begin{pmatrix} 5 & x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = (35)$, find x.

যদি $\begin{pmatrix} 5 & x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = (35)$, x ৰ মান উলিওৱাঁ।

(d) For what value of x, the matrix $\begin{pmatrix} 2-x & 3 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$ is not invertible ?

x-ৰ কি মানৰ বাবে, মৌলকক্ষ $\begin{pmatrix} 2-x & 3 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$ প্ৰতিলোমনীয় নহয়?

(e) If A is a square matrix of order 3 such that $|A| = 5$, find $|A \cdot adj\, A|$.

A এটা 3 ঘাতৰ বৰ্গ মৌলকক্ষ যাতে $|A| = 5$. তেন্তে $|A \cdot adj\, A|$ ৰ মান উলিওৱাঁ।

(f) A function $f : R \to R$ is defined as follows

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{if } x \leq 1 \\ 5, & \text{if } x > 1 \end{cases}$$

Which one of the following is true ?

(i) f is continuous at 0 and 1.

(ii) f is continuous at 1 and 2.

(iii) f is continuous at 0 and 2.

(iv) f is continuous at 0, 1 and 2.

এটা ফলন $f : R \to R$ অৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে,

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{যদি } x \leq 1 \\ 5, & \text{যদি } x > 1 \end{cases}$$

তলৰ কোনটো উক্তি সত্য ?

(i) f ফলন 0 আৰু 1 বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন।

(ii) f ফলন 1 আৰু 2 বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন।

(iii) f ফলন 0 আৰু 2 বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন।

(iv) f ফলন 0, 1 আৰু 2 বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন।

(g) Which one of the following is true?
For the function $f(x) = \cos x$,

(i) f is strictly decreasing in $(\pi, 2\pi)$

(ii) f is strictly increasing in $(\pi, 2\pi)$

(iii) f is neither increasing nor decreasing in $(\pi, 2\pi)$

ফলন $f(x) = \cos x$ অৰ বাবে তলৰ কোনটো উক্তি সত্য?

(i) $(\pi, 2\pi)$ অন্তৰালত, f নিশ্চিতভাৱে হ্ৰাসমান

(ii) $(\pi, 2\pi)$ অন্তৰালত, f নিশ্চিতভাৱে বৰ্ধমান

(iii) $(\pi, 2\pi)$ অন্তৰালত, f বৰ্ধমানো নহয় আৰু হ্ৰাসমানো নহয়।

(h) What is the unit vector along the vector $\vec{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}$?

ভেক্টৰ $\vec{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}$ ৰ দিশত একক ভেক্টৰ কি?

(i) What are the direction cosines of the normal to the plane $3x + 2y - 3z = 8$?

$3x + 2y - 3z = 8$ সমতলৰ অভিলম্বৰ দিশাংকবোৰ কিমান?

(j) What is the equation of the xy-plane?

xy-সমতলখনৰ সমীকৰণ কি ?

2. Show that the relation R in the set $\mathbb{Z}$ of integers given by,

$R = \{(x, y) : 5 \text{ divides } x - y\}$ is an equivalence relation. Find the set of all elements related to 0. 3+1=4

দেখুওৱাঁ যে, অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি $\mathbb{Z}$ অত,

$R = \{(x, y) : x - y,\ 5$ এৰে বিভাজ্য$\}$ এটা সমতুল্য সম্বন্ধ। 0 ৰ লগত সম্বন্ধ থকা মৌলবোৰৰ সংহতিটো উলিওৱাঁ।

OR / অথবা

A function $f : R \to R$ is defined by $f(x) = 4x^3 + 5, \quad x \in R$. Examine if f is one-one and onto. 2+2=4

এটা ফলন $f : R \to R$ অৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে

$$f(x) = 4x^3 + 5, \quad x \in R.$$

f ফলনটো একৈকী আৰু আচ্ছাদক হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰাঁ।

3. If $\sin^{-1} x + \sin^{-1} y + \sin^{-1} z = \pi$, prove that

$$x\sqrt{1 - x^2} + y\sqrt{1 - y^2} + z\sqrt{1 - z^2} = 2xyz.$$ 4

যদি $\sin^{-1} x + \sin^{-1} y + \sin^{-1} z = \pi$, প্ৰমাণ কৰাঁ যে

$$x\sqrt{1 - x^2} + y\sqrt{1 - y^2} + z\sqrt{1 - z^2} = 2xyz.$$

OR / অথবা

Prove that,

$$\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{7}+\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$$ 4

প্ৰমাণ কৰা যে,

$$\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{7}+\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$$

4. If $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, show that $A^2-5A+7I=0$. Hence find A^{-1}. 2+2=4

যদি $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, দেখুওৱা যে $A^2-5A+7I=0$ আৰু ইয়াৰপৰা A^{-1} উলিওৱা।

OR / অথবা

Using elementary row operations, find the inverse of the matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$ 4

মৌলিক শাৰী প্ৰক্ৰিয়া ব্যৱহাৰ কৰি

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

মৌলকক্ষটোৰ প্ৰতিলোম মৌলকক্ষ উলিওৱা।

5. Show that $f(x)=|x-3|$ is continuous but not differentiable at $x=3$.

2+2=4

দেখুওৱাঁ যে, ফলন $f(x)=|x-3|$, $x=3$ বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন কিন্তু অৱকলনীয় নহয়।

OR / অথবা

If $y=(\sin x)^{\log x}$, find $\frac{dy}{dx}$. 4

যদি $y=(\sin x)^{\log x}$, তেন্তে $\frac{dy}{dx}$ উলিওৱাঁ।

6. Find the point at which the tangent to the curve $y=\sqrt{4x-3}-1$ has its slope $\frac{2}{3}$. Also find the equation of the tangent at that point. 2+2=4

$y=\sqrt{4x-3}-1$ বক্ৰৰ কি বিন্দুত, স্পৰ্শকৰ প্ৰৱণতা $\frac{2}{3}$ হ'ব? লগতে সেই বিন্দুটোত স্পৰ্শকৰ সমীকৰণ উলিওৱাঁ।

OR / অথবা

State Rolle's theorem and verify it for the following function. 1+3=4

$$f(x)=x^2+2x-8, \quad x\in[-4,2]$$

ৰ'লৰ উপপাদ্যটোৰ উক্তি লিখাঁ আৰু তলৰ ফলনটোৰ ক্ষেত্ৰত উপপাদ্যটোৰ সত্যতা পৰীক্ষা কৰাঁ।

$$f(x)=x^2+2x-8, \quad x\in[-4,2]$$

7. Evaluate the following integrals : 4×2=8

তলৰ অনুকলৰ মান উলিওৱাঁ :

(i) $\int \left(\sin^{-1} x \right)^2 dx$

OR / অথবা

$$\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$$

(ii) $\int_0^{\pi/4} \log(1+\tan x)\, dx$

OR / অথবা

$$\int_0^{\pi} \frac{x - \sin x}{1+\cos^2 x}\, dx$$

8. Solve : 4

সমাধান কৰাঁ :

$$\frac{dy}{dx} + y = x$$

OR / অথবা

Form a differential equation by eliminating the arbitrary constants a and b from

$$y = e^x (a \cos x + b \sin x)$$ 4

$y = e^x(a\cos x + b\sin x)$ অৰ পৰা যাদৃচ্ছিক ধ্ৰুৱক a আৰু b অপসাৰিত কৰি অৱকল সমীকৰণটো উলিওৱাঁ।

9. Show that the family of curves for which the slope of the tangent at any point (x, y) on it is $\dfrac{x^2+y^2}{2xy}$, is given by $x^2-y^2=cx$. 4

দেখুওৱাঁ যে, (x, y) বিন্দুত স্পৰ্শকৰ প্ৰৱণতা $\dfrac{x^2+y^2}{2xy}$ হোৱা, বক্ৰ পৰিয়ালটোৰ সমীকৰণ $x^2-y^2=cx$ হ'ব।

10. Find the area of the parallelogram whose diagonals are given by the vectors $\vec{a}=3\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}$ and $\vec{b}=\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}$. 4

$\vec{a}=3\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}$ আৰু $\vec{b}=\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}$ এটা সামান্তৰিকৰ দুডাল কৰ্ণ হ'লে, সামান্তৰিকটোৰ কালি উলিওৱাঁ।

OR / অথবা

If $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$, show that $\vec{a}$ and $\vec{b}$ are perpendicular to each other. 4

যদি $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$, তেন্তে দেখুওৱাঁ যে $\vec{a}$ আৰু $\vec{b}$ পৰস্পৰ লম্ব।

11. Find the shortest distance between the lines whose vector equations are given by
$\vec{r}=\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}+\lambda(-2\hat{i}+\hat{j}+3\hat{k})$ and $\vec{r}=2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k}+\mu(3\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k})$ 4

$\vec{r} = \hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k} + \lambda\left(-2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}\right)$ আৰু $\vec{r} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k} + \mu\left(3\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}\right)$ ৰেখা দুডালৰ মাজৰ নিম্নতম দূৰত্ব উলিওৱাঁ।

OR / অথবা

Find the acute angle between the planes whose vector equations are

$\vec{r} \cdot \left(2\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}\right) = 5$ and $\vec{r} \cdot \left(3\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}\right) = 3$ 4

$\vec{r} \cdot \left(2\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}\right) = 5$ আৰু $\vec{r} \cdot \left(3\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}\right) = 3$ সমতল দুখনৰ মাজৰ সূক্ষ্ম কোণটো উলিওৱাঁ।

12. Two cards are drawn successively, without replacement from a well-shuffled pack of 52 cards. Find the probability distribution of the number of aces. 4

52 পতীয়া তাচপাত এজাপ ভালকৈ মিহলি কৰি জাপটোৰপৰা দুখন পাত একাদিক্রমে পুনঃস্থাপন নকৰাকৈ টনা হ'ল। টেক্কাৰ সংখ্যাৰ সম্ভাৱিতা বণ্টন নিৰ্ণয় কৰাঁ।

OR / অথবা

A box contains 2 gold and 3 silver coins. Another box contains 3 gold and 3 silver coins. A box is chosen at random and a coin is drawn from it. If the selected coin is a gold coin, find the probability that it was drawn from the second box. 4

এটা বাকছত দুটা সোণৰ আৰু তিনিটা ৰূপৰ মুদ্ৰা আছে। আন এটা বাকছত তিনিটা সোণৰ আৰু তিনিটা ৰূপৰ মুদ্ৰা আছে। যাদৃচ্ছিকভাৱে এটা বাকছ লোৱা হ'ল আৰু তাৰপৰা এটা মুদ্ৰা লোৱা হ'ল। যদি নিৰ্বাচিত মুদ্ৰাটো সোণৰ মুদ্ৰা হয়, তেনেহ'লে এইটো দ্বিতীয় বাকছটোৰপৰা লোৱাৰ সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয় কৰাঁ।

13. Prove that 6

প্ৰমাণ কৰা যে

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \\ \beta+\gamma & \gamma+\alpha & \alpha+\beta \end{vmatrix} = (\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha+\beta+\gamma)$$

OR / অথবা

Show that

দেখুওৱা যে

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1+z \end{vmatrix} = xyz\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$$

$x \neq 0,\ y \neq 0,\ z \neq 0$ 6

14. Answer ***any one*** :

যিকোনো এটাৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) Find the maximum and minimum values, if any, of the following functions. 3+3=6

তলৰ ফলনবোৰৰ গৰিষ্ঠ আৰু লঘিষ্ঠ মান, যদি আছে, উলিওৱা।

(i) $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 12, \quad x \in R$

(ii) $g(x) = -x^2 \log x, \quad x \in R$

(b) Find the intervals in which the function $f(x)=\frac{4x^2+1}{x}$, $x \neq 0$, is

(i) increasing,

(ii) decreasing 6

কি অন্তৰালত

$f(x)=\frac{4x^2+1}{x}$, $x \neq 0$ ফলনটো

(i) বৰ্ধমান হ'ব,

(ii) হ্ৰাসমান হ'ব?

15. Find the area of the region in the first quadrant enclosed by the x-axis, the line $y=x$ and the circle $x^2+y^2=32$. 6

x-অক্ষ, $y=x$ ৰেখা আৰু $x^2+y^2=32$ বৃত্তই আগুৰা প্ৰথম চোকত থকা ক্ষেত্ৰটোৰ কালি উলিওৱা।

OR / *অথবা*

Find the area of the region common to the two circles $x^2+y^2=1$ and $(x-1)^2+y^2=1$. 6

$x^2+y^2=1$ আৰু $(x-1)^2+y^2=1$ বৃত্ত দুটাই আগুৰা উমৈহতীয়া ক্ষেত্ৰৰ কালি উলিওৱা।

16. Evaluate $\int_0^2 \left(x^2+1\right) dx$ as a limit of a sum. 6

$\int_0^2 \left(x^2+1\right) dx$ অক যোগফলৰ সীমা হিচাপে প্ৰকাশ কৰি মান উলিওৱাঁ।

17. Find the vector equation of the plane passing through the intersection of the planes $\vec{r}\cdot\left(2\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}\right)=2$ and $\vec{r}\cdot\left(3\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}\right)=-2$ and perpendicular to the vector $\vec{a}=5\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}$. 6

$\vec{r}\cdot\left(2\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}\right)=2$ আৰু $\vec{r}\cdot\left(3\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}\right)=-2$ সমতল দুখনে কটাকটি কৰা ৰেখাৰ মাজেৰে যোৱা আৰু ভেক্টৰ $\vec{a}=5\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}$ ৰ লম্বভাৱে থকা সমতলখনৰ ভেক্টৰ সমীকৰণ উলিওৱাঁ।

OR / অথবা

Find the equation of the plane that makes intercepts a, b and c on x, y and z-axes respectively. Also, if p is the length of the normal from the origin to this plane, prove that

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{p^2}$$ 3+3=6

x, y আৰু z-অক্ষত যথাক্ৰমে a, b আৰু c ছেদাংশ সৃষ্টি কৰা সমতলৰ সমীকৰণটো উলিওৱাঁ। মূল বিন্দুৰপৰা সমতলখনৰ দূৰত্ব p একক হ'লে প্ৰমাণ কৰাঁ যে

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{p^2}$$

18. Solve the following linear programming problem graphically. 6

লৈখিক নিয়মেৰে তলৰ বৈখিক প্ৰগ্ৰেমিং সমস্যাটোৰ সমধান উলিওৱাঁ।

Maximize and minimize $Z = 3x + 2y$

subject to constraints
$$x + 3y \le 60$$
$$x + y \ge 10$$
$$x \le y$$
$$x,\ y \ge 0$$

$Z = 3x + 2y$ ৰ সৰ্বোচ্চ আৰু সৰ্বনিম্ন মান উলিওৱাঁ য'ত

$$x + 3y \le 60$$
$$x + y \ge 10$$
$$x \le y$$
$$x,\ y \ge 0$$

OR / অথবা

Maximize and minimize $Z = 5x + 7y$

subject to 6
$$x + y \le 4$$
$$3x + 8y \le 24$$
$$10x + 7y \le 35$$
$$x, y \ge 0$$

$Z = 5x + 7y$ ৰ সৰ্বোচ্চ আৰু সৰ্বনিম্ন মান উলিওৱাঁ য'ত

$$x + y \le 4$$
$$3x + 8y \le 24$$
$$10x + 7y \le 35$$
$$x, y \ge 0$$

19. The sum and the product of the mean and variance of a binomial distribution are 24 and 128 respectively. Find the distribution. 6

এটা দ্বিপদ বন্টনৰ মাধ্য আৰু প্ৰসৰণৰ যোগফল আৰু পূৰণফল ক্ৰমে 24 আৰু 128, বন্টনটো নিৰ্ণয় কৰা।

OR / অথবা

If a fair coin is tossed 10 times, find the probability of getting

(i) exactly six heads.

(ii) at least six heads.

(iii) at most six heads. 2+2+2=6

এটা নিখুঁত মুদ্ৰা 10 বাৰ টছ্ কৰিলে, তলত দিয়া ধৰণে সম্ভাৱিতা উলিওৱা, যাতে

(i) ঠিক 6টা মুণ্ড প্ৰাপ্ত হয়।

(ii) অতি কমেও 6টা মুণ্ড প্ৰাপ্ত হয়।

(iii) খুব বেছি 6টা মুণ্ড প্ৰাপ্ত হয়।

—— × ——